

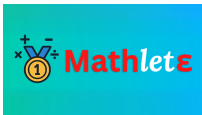
Módulo C2: Configuraciones Típicas

Combinatoria

Equipo de MathLet€

MathLet€

Julio 2025



Variaciones y Permutaciones (1/2)

Variaciones (o Arreglos):

- Sucesiones de k elementos distintos formadas con n objetos. El orden importa.
- Corresponden a funciones inyectivas de un conjunto de k elementos en uno de n elementos.
- Fórmula: $n(n-1) \dots (n-k+1)$

Variaciones con Repetición:

- Sucesiones de k elementos formadas con n objetos, donde se permiten repeticiones. El orden importa.
- Corresponden a funciones de un conjunto de k elementos en uno de n .
- Fórmula: n^k

Permutaciones:

- Arreglos de n objetos tomados de n en n . El orden importa.
- Fórmula: $n(n-1) \dots 1 = n!$, por convención $0! = 1$

Permutaciones Circulares:

- Configuraciones de n objetos en círculo, sin un inicio o fin fijo.
- Fórmula: $(n - 1)!$ (se fija un objeto y se permutan los restantes).

Permutaciones con Repetición:

- Sucesiones de n elementos con repeticiones: $a_1, a_2, \dots, a_r$ con multiplicidades $k_1, k_2, \dots, k_r$ tales que $n = k_1 + k_2 + \dots + k_r$
- Fórmula:
$$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$
- Ejemplo: Palabras distintas con las letras de "MATEMATICA":

$$\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200$$

Combinaciones y Coeficientes Binomiales (2/2)

Combinaciones:

- Subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos **sin importar el orden**.
- Se denota como $\binom{n}{k}$ o $C(n, k)$.
- Relación con permutaciones: Cada combinación de k elementos genera $k!$ permutaciones.
- Fórmula:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Propiedad de Simetría: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

- Explicación combinatoria: Elegir k elementos es equivalente a excluir $n - k$.

Coeficientes Binomiales:

- Aparecen en el desarrollo del binomio: $(x + y)^n$
- Teorema del Binomio:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Propiedades de los Coeficientes Binomiales (1/2)

Fórmula de Stifel (Identidad de Pascal):

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Demostración combinatoria:

- Considerar los subconjuntos de k elementos de $\{1, \dots, n\}$.
- Casos:
 - No contiene al n : hay $\binom{n-1}{k}$.
 - Contiene al n : hay $\binom{n-1}{k-1}$.
- Por el principio de la suma, se suman ambos casos.

Propiedades de los Coeficientes Binomiales (2/2)

Triángulo de Pascal:

- Cada número es la suma de los dos que están justo encima.
- Lados del triángulo: siempre 1 ($\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$).

Suma de Coeficientes Binomiales:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

- Demostración: Teorema del Binomio con $x = 1$, $y = 1$.

Combinaciones con Repetición

Definición:

- Selección de k elementos de un conjunto de n elementos, **admitiendo repeticiones** y sin importar el orden.
- Ejemplo para $\{a, b, c\}$ tomados de dos en dos: $\{aa, ab, ac, bb, bc, cc\}$.

Método de Estrellas y Barras:

- Representar con k estrellas (elementos) y $n - 1$ barras (divisiones).
- Total de símbolos: $k + (n - 1)$.
- El número de formas de distribuirlos: $\binom{n+k-1}{k}$.

Fórmula:

Número de combinaciones con repetición = $\binom{n+k-1}{k}$

- **Fenómeno Aleatorio:** Aquel que admite varios resultados posibles y no se puede predecir con exactitud cuál ocurrirá.
 - Ejemplo: Lanzar una moneda al aire y ver si muestra cara o sello.
- **Experimento Aleatorio:** Un fenómeno aleatorio que se puede repetir a voluntad, en condiciones prácticamente idénticas.
- **Espacio Muestral (X):** El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
 - Ejemplo: Si se lanza un dado, el espacio muestral es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Evento o Suceso (A):** Cualquier subconjunto del espacio muestral.
 - Ejemplo: En el caso del dado, $\{1, 3, 5\}$ es un evento que se puede caracterizar como "sale un número impar".

- **Experimento Equiprobable:** Aquel donde todos los resultados posibles tienen la misma oportunidad de ocurrir.
 - Ejemplo: Un dado construido de material homogéneo.
- **Definición Clásica de Probabilidad:** Para un experimento equiprobable con espacio muestral finito X y un evento $A \subset X$, la probabilidad $\mathbf{P(A)}$ se define como:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{|A|}{|X|}$$

En palabras, es el cociente entre el número de “casos favorables” y el número de “casos posibles”.

- Ejemplo: La probabilidad de obtener un número impar al lanzar un dado es $|\{1, 3, 5\}|/|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}| = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Problema 1: ¿Cuántos subconjuntos de $[1, n]$ tienen un número impar de elementos?

- Total de subconjuntos: 2^n .
- Hay una biyección entre subconjuntos con cantidad par e impar de elementos (si $n > 0$).
- Por lo tanto, la mitad tienen cardinal impar.
- **Respuesta:** 2^{n-1}

Problema 2: ¿Cuántos triángulos se pueden formar con vértices de un decágono regular?

- Un decágono tiene 10 vértices.
- Seleccionamos 3 vértices sin importar el orden: $\binom{10}{3}$.
- **Respuesta:** $\binom{10}{3} = 120$

Problema 3: ¿Cuántas funciones crecientes $f : [1, k] \rightarrow [1, n]$ existen?

- Cada función creciente corresponde a una combinación con repetición de k elementos en n .
- Vínculo: estrellas y barras.
- **Respuesta:** $\binom{n+k-1}{k}$

Problema 4: ¿Cuántos subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$ con k elementos y sin consecutivos?

- Modelado con ceros y unos: no puede haber unos consecutivos.
- Hay $n - k + 1$ lugares para los k unos.
- **Respuesta:** $\binom{n-k+1}{k}$

¡Gracias por su atención!
Preguntas y discusión.